

تقديم

حاول العلماء منذ العصور القديمة تحديد مماسات لبعض المنحنيات . وقد قدم أرخميدس (Archimède) (212-278) مقترحا في هذا الصدد. وأسفرت أعمال جملة من الرياضيين و الفيزيائيين ، فيما بعد، خاصة نيوتن (Newton) (1642-1727م) وليبنيتز (Leibniz) (1646-1716م) في تحديد عام لمماسات منحنيات دوال ، وتحديد سرعة جسم متحرك . كما نتج عن تقدم الحساب التفاضلي تطور لمفهوم الاشتقاق . ويرجع الفضل للعالم الرياضي والفلكي الفرنسي افضالي الأصل لاغرانج Louis, Joseph Lagrange de compte (1736-1813 م) في إدخال كلمة " المشتقة " وفي وضع الترميز $f'(x)$ الذي عرف كنهاية لمعدل التغير.



غوتفريد لايبنتس



جوزيف لوي لاغرانج

نبذة عن عالم

غوتفريد فيلهيلم من لايبنتز (أيضاً لايبنتز) الحديث لمبدأ انحفاظ الطاقة. 1646-1716 فيلسوف ألماني، عالم طبيعة، عالم رياضيات، دبلوماسي، مكثي، ومحامي. يرتبط اسم لايبنتز بالتعبير " دالة رياضية " (1694)، التي كان يصف بها كل كمية متعلقة ب منحني، مثل ميل المنحني أو نقطة معينة على المنحني.



يعتبر لايبنتز مع نيوتن أحد مؤسسي علم التفاضل و التكامل و بخاصة تطوير مفهوم التكامل و قاعدة الجداء ، كما طور المفهوم

بطاقة تقنية رقم : 02

ثانوية : الفتح التأهيلية السنة الدراسية : 2015 - 2016 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الثانية باكوريا علوم تجريبية درس : الاشتقاق التذير الزمني : 5 ساعات
فقرات الدرس	<ul style="list-style-type: none">• تذكير وإضافات• العمليات على الدوال المشتقة• الاشتقاق والاتصال• مشتقة مركب دالتين• مشتقة الدالة العكسية
المكتسبات القبلية	<ul style="list-style-type: none">• النهايات والاتصال• مفاهيم أساسية حول مفهوم الاشتقاق• تطبيقات الاشتقاق (رتابة دالة عددية - مطارف دالة عددية - المعادلة التفاضلية $(y' + \omega^2 y = 0$)• دراسة الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة	<ul style="list-style-type: none">• حساب مشتقات الدوال الاعتيادية ؛• تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها ؛• تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها البياني ؛• تحديد العدد المشتق في نقطة للدالة العكسية لدالة ؛• تحديد رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال
التوجيهات التربوية	<ul style="list-style-type: none">• يتم التذكير بمفهوم الاشتقاق وتطبيقاته من خلال أنشطة متنوعة تبرز أهمية التي يكتسبها في الدراسة الموضوعية والشاملة للدوال المقررة وخاصة في التقريب المحلي لدالة وفي دراسة منحى تغيرات دالة على مجال وتحديد المطاريف ودراسة إشارة دالة أو متفاوتة جبرية على مجال ...• تتم صيانة مكتسبات التلاميذ حول الاشتقاق والنهايات من خلال دراسة أمثلة لدوال حدودية و دوال جذرية و دوال لاجذرية و دوال مثلثية
الوسائل اليداكتيكية	سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي - ملخص المكتسبات السابقة ؛

1 أنشطة الدرس

نشاط 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمبايلي : $f(x) = x^2 - 4$

1 أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h}$ ثم استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 2 و -1

2 حدد $f'(-1)$ و $f'(2)$ **3** اعط معادلة مماس منحنى الدالة f في النقطة 2

نشاط 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمبايلي :
$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ f(x) = 3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$

1 أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار وعلى اليمين في 1 ؛ ثم اول النتيجتين المحصل عليهما مبيانيا

2 هل الدالة f قابلة للاشتقاق في 1 ؟

3 حدد تعبير معادلي المماسين (T_d) و (T_g) و $(T_d) : y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$ و $(T_g) : y = f'_g(1)(x-1) + f(1)$

4 أنشئ (\mathcal{C}_f) و (T_d) و (T_g) و النقطة $M(1, f(1))$ في نفس المعلم المتعامد المنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نشاط 3

في كل حالة من الحالات التالية ادرس قابلية الدالة f على المجال I ، ثم حدد دالتها المشتقة f'

1 $I =]0, +\infty[$ ؛ $f(x) = x + \sqrt{x}$ **3** $I =]2, +\infty[$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x^3 - 8}$

2 $I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = (x+2)(x-1)$ **4** $I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

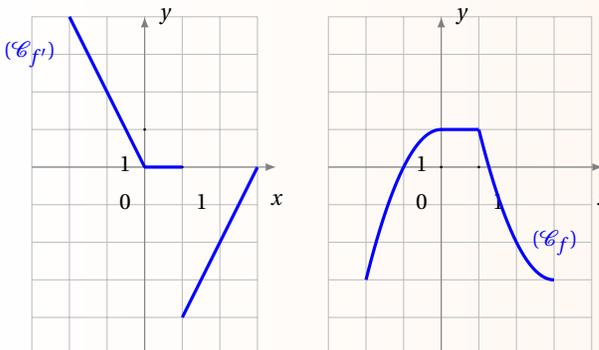
نشاط 4

يمثل الشكلان (\mathcal{C}_f) و $(\mathcal{C}_{f'})$ جانبه على التوالي منحنى دالة f ودالتها المشتقة f'

1 أتمم ملء الجدول التالي :

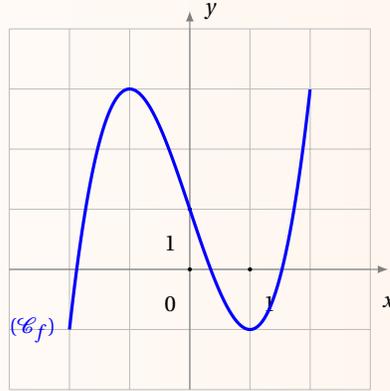
المجال	إشارة الدالة المشتقة f'	تغيرات الدالة f
$I =]-2, 0[$		
$J =]0, 1[$		
$K =]1, 3[$		

2 ذكر بالخاصية التي تربط إشارة الدالة f' بتغيرات الدالة f



نشاط 5

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بتمثيلها المبياني أسفله .



- 1 ماذا تمثل النقطتان $A(1, f(1))$ و $B(-1, f(-1))$ بالنسبة للدالة f ؟
- 2 حدد $f(1)$ و $f(-1)$ و $f'(1)$ و $f'(-1)$
- 3 حدد معادلتين مماسيتين لمنحنى الدالة f وانشأهما في نفس الشكل . ماذا تلاحظ ؟

نشاط 6

نعتبر الدوال f و g و h المعرفة على \mathbb{R}^+ بمائلي : $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{1}{1+x}$ و $h(x) = \sqrt{x}$

- 1 تحقق أن : $f = g \circ h$
- 2 أحسب مشتقات الدوال f و g و h
- 3 قارن $f'(x)$ و $g'(h(x)) \cdot h'(x)$ بالنسبة ل $x \in]0, +\infty[$

نشاط 7

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ ب : $f(x) = x^2 - 1$

- 1 بين أن f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده
- 2 تحقق أن : $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ ($\forall x \in J$)
- 3 بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $] -1, +\infty[$ وأحسب $(f^{-1})'(x)$
- 4 تحقق أن : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ($\forall x \in] -1, +\infty[$)

2 تذكير وإضافات

1.2 اشتقاق دالة في نقطة

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$

• نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a ونرمز له ب $f'(a)$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

• إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في a فإن الدالة : $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ الدالة التآلفية المماسية للدالة f في النقطة a (أو التقريب التآلفي للدالة f بجوار a)

• معادلة المماس للدالة f في النقطة a هي : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

تطبيقي تمرين

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

1 $x_0 = 1$ ؛ $f(x) = 3x^2 + x$

2 $x_0 = -1$ ؛ $f(x) = x^3 + 2x$

3 $x_0 = 1$ ؛ $f(x) = x + |x+1|$

تطبيقي تمرين

باستعمال مفهوم العدد المشتق أحسب النهايتين التاليتين :

1 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x-x^2)^{2015} - 1}{x-1}$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

4 $(a > 0) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3}$

تطبيقي تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

1 بين أن f قابلة للاشتقاق في النقطة 0

2 حدد التقريب التالي للدالة f بجوار 0

3 اعط قيمة مقربة للعددين $\sqrt[3]{1.0035}$ و $\sqrt[3]{0.997}$

2.2 الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

تعريف

...

• لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a, a+\alpha]$ ($\alpha > 0$). نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا وجد

$$\text{عدد حقيقي } l \text{ بحيث : } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في a ونرمز له بـ $f'_d(a)$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$ أو

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$$

• لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a-\alpha, a]$ ($\alpha > 0$). نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في a إذا وجد

$$\text{عدد حقيقي } l \text{ بحيث : } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في a ونرمز له بـ $f'_g(a)$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$ أو

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$.

نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في a و $f'_g(a) = f'_d(a)$

تطبيقي تمرين

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f (على اليمين أو اليسار) في x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

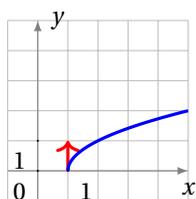
1 $f(x) = x\sqrt{x}$ ؛ على اليمين في $x_0 = 0$

2 $f(x) = x + \sqrt{x-2}$ ؛ على اليمين في $x_0 = 2$

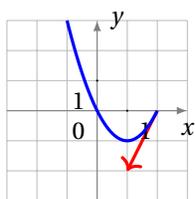
3 $f(x) = |x^2 - x|$ ؛ على اليسار في $x_0 = 1$

3.2 قابلية الاشتقاق و التاويل الهندسي

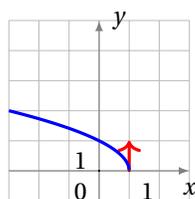
التاويل الهندسي للمنحنى : (\mathcal{C}_f) يقبل ...	استنتاج	النهاية
1 مماسا في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامل الموجه هو a	قابلة f للاشتقاق في x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \neq 0$
2 مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0, f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
3 نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامل الموجه هو a	قابلة f للاشتقاق على اليمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \neq 0$
4 نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0, f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
5 نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ موجه نحو الأسفل	f غير قابلة للاشتقاق على اليمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
6 نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ موجه نحو الأعلى		$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
7 نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامل الموجه هو a	قابلة f للاشتقاق على اليسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \neq 0$
8 نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0, f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
9 نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ موجه نحو الأعلى	f غير قابلة للاشتقاق على اليسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
10 نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ موجه نحو الأسفل		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$



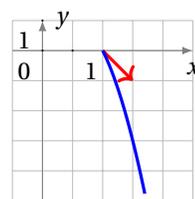
الشكل 9



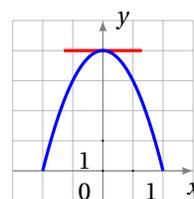
الشكل 7



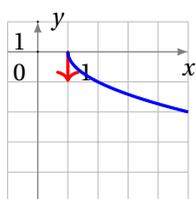
الشكل 5



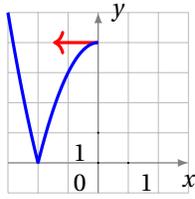
الشكل 3



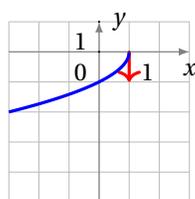
الشكل 1



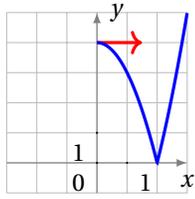
الشكل 10



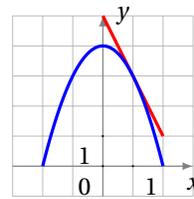
الشكل 8



الشكل 6



الشكل 4



الشكل 2

4.2 الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة

تعريف

...

- نقول إن f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
- نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a, b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال المفتوح $]a, b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة للاشتقاق على اليسار في b .
- الدالة المعرفة بـ $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' .
- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' .

5.2 الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية - العمليات على الدوال المشتقة

الجدول التالي يلخص مشتقات بعض الدوال الاعتيادية :

الدالة f	D_f مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة f'	$D_{f'}$ مجموعة تعريف f'
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n; (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n; (n \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f =]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} =]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(x)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan(ax + b)$	$ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$	$f'(x) = a(1 + \tan^2(ax + b))$	$ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}; c \neq 0$	$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}; c \neq 0$

العمليات على الدوال المشتقة

...

- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن : الدوال $f+g$ و fg و λf دوال قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(f+g)' = f' + g'$ و $(fg)' = f'g + fg'$ و $(\lambda f)' = \lambda f'$
- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و g لا تنعدم على I فإن : الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ قابلتان للاشتقاق على I ولدينا : $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$ و $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

...

- 1 كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}
- 2 كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- 3 الدالتين $x \rightarrow \cos(x)$ و $x \rightarrow \sin(x)$ قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}
- 4 الدالة $x \rightarrow \tan(x)$ قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
- 5 الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f ثم حدد دالتها المشتقة في الحالات التالية :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x} \quad \boxed{3}$$

$$f(x) = x^2 + \cos(x) \quad \boxed{4}$$

$$f(x) = (-7x + x^2 + 3)^5 \quad \boxed{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x} + 3x \quad \boxed{2}$$

6.2 رتبة دالة وإشارة مشتقتها

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
- إذا كانت f' موجبة (قطعا) على I فإن الدالة f تزايدية (قطعا) على I
 - إذا كانت f' سالبة (قطعا) على I فإن الدالة f سالبة (قطعا) على I
 - إذا كانت f' منعدمة على I فإن الدالة f ثابتة على I

7.2 مطارف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I
- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق في x_0 وتقبل مطراف في النقطة x_0 فإن $f'(x_0) = 0$
 - إذا كانت f' تتعدم في x_0 وتغير اشارتها فإن $f(x_0)$ مطراف للدالة f

تطبيقي تمرين

أدرس رتبة الدالة f ومطرافها إذا وجدت في الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \mathbf{4}$$

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad \mathbf{5}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} \quad \mathbf{6}$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad \mathbf{1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} \quad \mathbf{2}$$

$$f(x) = (2x - 3)\sqrt{x} \quad \mathbf{3}$$

8.2 الاتصال و الاشتقاق

خاصية

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$ ؛ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a فإن f متصلة في a .

ملاحظة

عكس هذه الخاصية غير صحيح
مثال مضاد : لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} ب : $f(x) = |x|$
لدينا f متصلة في 0 لكن f غير قابلة للاشتقاق في 0 لأن $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

نتيجة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f متصلة على I

3 مشتقة مركب دالتين

خاصية

- لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$
- إذا كان a عنصرا من المجال I بحيث f قابلة للاشتقاق في a و g قابلة للاشتقاق في $f(a)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في a ولدينا : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$
 - إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) (\forall x \in I)$

نتيجة

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
- $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} (I \text{ على } f \geq 0)$
 - $(f^n(x))' = n f'(x) f^{n-1}(x) (n \in \mathbb{N}^*)$

مثال

لنحسب f' و g' مشتقتي الدالتين : $f(x) = \sin(x^2 - 4x + 1)$ و $g(x) = \tan(\sqrt{x})$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\tan(\sqrt{x}))' \\ &= (\sqrt{x})' \times \tan'(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (1 + \tan^2(\sqrt{x})) \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (1 + \tan^2(\sqrt{x}))$$

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(x^2 - 4x + 1))' \\ &= (x^2 - 4x + 1)' \times \sin'(x^2 - 4x + 1) \\ &= (2x - 4) \times \cos(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = (2x - 4) \times \cos(x^2 - 4x + 1)$$

4 مشتقة الدالة العكسية

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I .

• إذا كان a عنصراً من المجال I بحيث f قابلة للاشتقاق في a و $f'(a) \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(a)$

$$\text{ولدينا : } (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

• إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم في $f(I)$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق

$$\text{على المجال } f(I) \text{ ولدينا : } (\forall x \in f(I)) (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

تطبيقي تمرين

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[1, +\infty[$ ب : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1 بين أن f تقبل دالة عكسية على مجال J يجب تحديده نحو $[1, +\infty[$

2 حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

3 أحسب $f(2)$ و استنتج $(f^{-1})'(3)$

نتائج

لتكن f دالة موجبة قطعاً وقابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^*$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ حسب الخاصية السابقة نستنتج مايلي :

الدالة المشتقة	مجال قابلية الاشتقاق	الدالة
$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$
$f'(x) = (x^r)' = r x^{r-1}$	f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$	$f(x) = x^r$
$g'(x) = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$	g قابلة للاشتقاق على I	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
$g'(x) = \left((f(x))^r\right)' = r \times f'(x) \times (f(x))^{r-1}$	g قابلة للاشتقاق على I	$g(x) = (f(x))^r$